



TITLE:

Marangoni対流に対する非線形表面波の効果(ナビエ・ストークスの方程式の解)

AUTHOR(S):

舟田, 敏雄

CITATION:

舟田, 敏雄. Marangoni対流に対する非線形表面波の効果(ナビエ・ストークスの方程式の解). 数理解析研究所講究録 1984, 510: 33-44

ISSUE DATE:

1984-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/98315>

RIGHT:

Marangoni 対流に対する非線形表面波の効果

和歌山高専 舟田敏雄 (Toshio Funada)

1. はじめに

気液（又は液液）界面において、表面張力が不均一なときには、Marangoni 効果（表面張力勾配）が働いて対流を発生させ得る。この現象の理論的解明は、静止液層の線形中立安定性の吟味に始まった。^{1), 2)}しかし、自由表面の変形があると、表面張力が作用し、低波数域に顕著な影響が現われて、臨界 Marangoni 数 Ma_{RC} が“ゼロ”になるという結果を与える事が示された。³⁾更に、固体壁上の液層の場合には、重力をも考慮すると、低波数域は安定化されるが、反面、重力が逆向きのときは特異的な作用を及ぼし、不安定化の原因ともなり得る事が明らかになった。^{4)~6)}又、この一見奇妙とも思われる表面変形の効果は、勾配を引き起こす要因の対流機構には依存せず、変形表面の境界条件の近似によるものである事（それを“表面変位不安定”と呼んだ）が分かっている。^{5), 6)}そこで、本研究では、非線形理論によりこの表面変形の効果の解析を試み

る。

先に、④熱移動系の温度、⑤気液擬1次反応吸収系の生成物の変動に起因するMarangoni効果について、浅水近似を用いて計算し、適当な条件の下で表面変位 η を支配するモデル方程式

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta^n \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = 0$$

(a はMarangoni数 M_R に比例する定数, n 非負整数)を導いた。そして、 $a < 0$ ($M_R < 0$) のとき η は時間と共に減衰、 $a > 0$ のとき増大する事を示した。但し、この式は、 $|M_R|$ が大きいところで成立するものであり、表面張力は無視している。又、その後、周期境界条件の下に η をFourier級数に展開し、初期値問題として振幅の時間発展を数値計算すると、極めて短時間の内に高波数成分が発生、増幅される事が分かった。しかし、高波数増幅率が大きい為、結果は定性的傾向を指摘できるに過ぎない。

ここでは、④を更に発展させ、高次の効果をも取り入れて、 M_{RC} 近傍において η を記述する方程式を導く。又、それに到る過程で、固体壁の温度変化によって起こる表面変位の式を求め、特別な場合として、カオス的な解を持つ式に帰着できる事を示す。

2. 問題の定式化

縮まない粘性流体の薄い液層を考える。層の厚さ方向に y 軸を取り、 $y=0$ を固体壁、 $y=h$ を自由表面とする。初め液層は $h = \text{const.}$ で静止しており、定常温度分布 $T(y)$ が実現している。そして、温度攪乱に起因する表面張力 σ の変化

$$d\sigma = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) dT$$

によって対流が誘起され、表面変位が発生する。攪乱は2次元とし、 x 方向の変化のスケール l が y 方向の h_0 (平均液厚又は初期厚み) に比べ充分大きく、浅水パラメータ ϵ

$$\epsilon = \frac{h_0}{l} \ll 1$$

を導入できるものとする。速度場 $u(x, y, t) = (u, v, 0)$ を流れ関数 ψ で表わすと、基礎方程式は、無次元形で、

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = \epsilon \frac{\partial P}{\partial x} + R\epsilon \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -W - \epsilon \mathcal{L}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + R\epsilon^2 \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \quad (2)$$

$$\mathcal{L}T = R\epsilon \frac{DT}{Dt} \quad (3)$$

となる。但し、 P は圧力であり、

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}$$

と置いた。Rは流れの代表速度 u_0 と h_0 とを用いて定義した Reynolds 数, Pr は Prandtl 数である。Wは重力に対する粘性項の比であり、 $W > 0$ のとき重力は-y方向に働く。尚、これ以降、添字セロの付いた量のみ有次元、他は全て無次元とする。この系の境界条件として

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y=0 \quad (4)$$

$$T = \hat{T}(x, t) \quad \text{at } y=0 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \cos 2\theta \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \epsilon^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) - 2\epsilon \sin 2\theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \\ & = M_R \epsilon \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \cos \theta \quad \text{at } y=h \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & P - P_a + 2\epsilon \cos 2\theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \sin 2\theta \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \epsilon^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \\ & = -\frac{\epsilon^2}{N_c} \cos^3 \theta \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad \text{at } y=h \quad (7) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{at } y=h \quad (8)$$

$$\cos \theta \frac{\partial T}{\partial y} - \epsilon \sin \theta \frac{\partial T}{\partial x} = -\lambda(T-1) \quad \text{at } y=h \quad (9)$$

$$\left(\sin \theta = \epsilon \frac{\partial h}{\partial x} / \sqrt{1 + \epsilon^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2} \right)$$

を用いる。ここで、 \hat{n} は固体壁側の外部攪乱、 P_a は気相側圧力である。(6)式右边が表面張力勾配を、(7)式右边は表面張力を示す。 M_R とCrispation 数 N_c との積

$$M_R N_c = \frac{1}{\sigma_0} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_0 \Delta T_0$$

は温度による表面張力の変化率を表わす。 ΔT_0 は、定常状態における固体壁と気相側との温度差であり、無次元化の際に用いられている。(9)式の λ は熱伝達率である。

さて、方程式と条件(1)~(9)が静止定常解

$$\left. \begin{aligned} \bar{\psi} &= \text{const.} = 0, & \bar{h} &= \text{const.} = 1 \\ \bar{p} &= P_a + W(1-y), & \bar{T} &= \lambda y / (1+\lambda) \end{aligned} \right\} (10)$$

を持つ事は容易に分かる。次に攪乱を ϵ のべき級数に展開し、

$$(\psi, p, T) = \sum_{n=0} \epsilon^n (\psi^{(n)}, p^{(n)}, T^{(n)}) \quad (11)$$

とおくと、運動学的条件(8)は、

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \psi^{(0)} + \epsilon \psi^{(1)} + \dots \right\}_{y=h} = 0 \quad (8')$$

と表わされる。従って、各パラメータの大きさを規定し、逐次計算していけば h を支配する方程式が求められる。但し、扱う問題に対する解法手順としては、

$$\left. \begin{aligned} R &= O(\epsilon) \quad , \quad W = O(1) \quad , \quad M_R \epsilon = O(1) \\ N_c &= O(\epsilon^2) \quad , \quad P_R R = O(1) \quad , \quad \lambda = O(1) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

を仮定し、先ず \hat{T} によって起こる h を求め、次いで M_{RC} 近傍について調べる。

展開の $O(\epsilon^0)$ の解は、

$$\psi^{(0)} = F(x, t) y^2 \quad (13)$$

$$P^{(0)} = W(h-1) - \frac{\epsilon^2}{N_c} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (14)$$

$$T^{(0)} = \hat{T} + B(x, t) y \quad (15)$$

$$B = \frac{-\lambda}{1+\lambda h} \left(\frac{\lambda(h-1)}{1+\lambda h} + \hat{T} \right) \quad (16)$$

となるから、条件(6)を用いて、

$$F = \frac{M_R \epsilon}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\hat{T} + \lambda h}{1 + \lambda h} \right) \quad (17)$$

を得る。そして、 $\hat{T} = 0$ について、(13), (17)式を(8')式に代入すると、既に議論した式⁷⁾となる。

$O(\epsilon)$ の結果の中で(8)式の計算に必要な量のみを記すと

$$(\psi''')_h = \frac{Mr\epsilon}{2} h^2 \frac{\partial}{\partial x} (T''')_{y=h} - \frac{1}{3} \frac{\partial P^{(0)}}{\partial x} h^3 \quad (18)$$

$$(T''')_h = \frac{-PrR}{1+\lambda h} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} h^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial B}{\partial t} + 2F \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} \right) h^3 \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \left(2F \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\lambda(\hat{T}-1)}{1+\lambda h} \right) h^4 \right\} \quad (19)$$

となる。

3. 外部温度攪乱による対流

固体壁温度が $T=0$ から $T=\hat{T}$ に変化する事によって起こる Marangoni 効果を考えよう。液層と気相との伝達熱量は、通常 (特に熱伝導が支配的な場合) あまり大きくはない。そこで、 $\lambda \rightarrow 0$ の極限を取ると、(8)式は、

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{Mr\epsilon}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(h^2 \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} \right) \\ = \frac{Mr\epsilon^2 PrR}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ h^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} h^2 + \frac{1}{3} Mr\epsilon \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial x} \right)^2 h^3 \right) \right\} \\ + \frac{1}{3} W\epsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{1}{3} \frac{\epsilon^3}{Nc} \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} \right) \quad (20)$$

と表わされる。(20)式は、 \hat{T} が t 又は x のみの関数のとき、更に簡単になる。

特別な場合として $\hat{\eta}(x) = ax + b$ と与えると、(20)式は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \alpha h \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{1}{2} \epsilon \alpha^2 P_r R \frac{\partial}{\partial x} (h^4 \frac{\partial h}{\partial x}) \\ &+ \frac{1}{3} W \epsilon \frac{\partial}{\partial x} (h^3 \frac{\partial h}{\partial x}) - \frac{1}{3} \frac{\epsilon^3}{N_c} \frac{\partial}{\partial x} (h^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}) \quad (21) \end{aligned}$$

($\alpha = M_R \epsilon a$) となる。右辺は $O(\epsilon)$ の量であるが、左辺のみの式は「つっ立ち」を起こすので、右辺全体がそれを抑制する役割を果たしている。又、一般に表面張力は温度の減少関数であるから、壁が熱いとき $M_R > 0$ となり、 $a > 0$ ならば攪乱は x 方向に伝わる。但し、 α の正負は、変換 $x \rightarrow -x$ によって整理できるので、 $\alpha > 0$ として扱う。

表面変位を $h = 1 + \sqrt{\epsilon} \hat{h}$ と規定し、 $O(\epsilon)$ 迄取って置き替えると、(21)式から

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \alpha h \frac{\partial h}{\partial x} = \epsilon \beta \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{1}{3} \frac{\epsilon^3}{N_c} \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \quad (22)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \alpha^2 P_r R + \frac{1}{3} W \quad (23)$$

を得る。重力と表面張力を無視できるとき ($W = 0$, $N_c \rightarrow \infty$) (22)式は Burgers 方程式となる。重力があり、且つ $W < 0$ (重力の向き逆転) となっても、 $\beta > 0$ ならば右辺第1項は抑制作用を表わす。しかし、負の W は、 $\beta = 0$ (第1項消失)、更

には $\beta < 0$ (増幅又は不安定化作用) を与える場合がある。

尚、右辺第2項は抑制効果を表わす。

$\beta < 0$ のとき、(22)式は、適当な変換(詳細は省略)を経て、

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial h}{\partial x} + \beta' \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} = 0 \quad (24)$$

($\beta' > 0$) と表わされるから、文献8)で求められた式と同形である。(24)式を線形近似して調べると、低波数域が不安定である事が示される。尚、講演の際に示した(24)式の数値計算結果($\beta' = 1$)は、文献9)より借用した。

4. M_{RC} 近傍の表面変位

$\hat{\Gamma} = 0$ のとき、(17), (18)式より、(8)式は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} = & \frac{M_{RC}}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ h^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{1 + \lambda h} \right) \right\} \\ & + \frac{1}{3} W \epsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{1}{3} \frac{\epsilon^3}{\lambda c} \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) \\ & - \frac{M_{RC} \epsilon^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ h^2 \frac{\partial}{\partial x} (T'')_{y=h} \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

$$(T'')_h = \lambda^2 P_R \left(\frac{h}{1 + \lambda h} \right)^3 \left\{ \frac{1}{3} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{M_{RC}}{8} \frac{h}{1 + \lambda h} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right\} \quad (26)$$

となり、 x について偶数回微分の項のみが現われる。 $\lambda < 1$ ($|\lambda h| < 1$) として、 $O(\lambda^2)$ 迄を取り込むと講演で示した

式（容易に計算できるので省略する）を得る。しかし、前節と同様にして、 $h = 1 + \sqrt{\epsilon} \hat{h}$ を代入して $O(\epsilon)$ 迄取ると

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{M_R \epsilon}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (a_2 h^2 + a_1 h + a_0) \frac{\partial h}{\partial x} \right\} + \dots \quad (27)$$

$$a_2 = \frac{\lambda(1-2\lambda)}{(1+\lambda)^4}, \quad a_1 = \frac{6\lambda^2}{(1+\lambda)^4}, \quad a_0 = \frac{\lambda^2(\lambda-2)}{(1+\lambda)^4} \quad (28)$$

となり、右辺第1項が、(25)式のそれの $\lambda \sim 0$, $\lambda \gg 1$ の漸近形の両方を含む形に表わされる。

線形安定論の中立曲線の低波数域の様子（例えば文献6）を参照）は、(25)式を h について線形化して得られる。即ち、第4項は無視し、定常解 $h \propto \exp(ikx)$ (k 波数) を代入して、

$$M_R = \frac{2}{3} \frac{1}{a_3} \left(W + \frac{k^2}{N_c} \right) \sim \frac{2}{3} \frac{W}{a_3} \quad (29)$$

($a_3 = \lambda / (1+\lambda)^2$) となる。従って、(29)式が臨界値を与えるとき、その近傍では、(27)式から

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} = & -\frac{1}{3} \frac{\epsilon}{a_3} W \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (a_2 h^2 + a_1 h + a_0) \frac{\partial h}{\partial x} \right\} \\ & - \frac{\delta M_R \epsilon}{2} a_3 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{1}{3} W \epsilon \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (h^3 - (h-1)^3) \frac{\partial h}{\partial x} \right\} \\ & - \frac{1}{3} \frac{\epsilon^3}{N_c} \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \end{aligned} \quad (30)$$

を得る。但し、 $M_R = M_{RC} + \delta M_R$ と置き、 $\delta M_R = O(1)$ 及び $N_c = O(\epsilon^2 W)$ として、それらの項を線形化した。(30)式の定常解は、 $\partial h / \partial x$ を速度と見なすと、 h の4次式で表現できるポテンシャル場の質点の運動に対応する。尚、ポテンシャルの構造 (W の符号, “振動モード” と周期境界条件との関係等) の検討, (30)式の数値計算については、目下進行中なので、追って報告する事としたい。

5. おわりに

本稿では温度変動による表面張力勾配を扱ったが、固体壁と気相に接する液層において、勾配の発生要因が運動方程式中には含まれず、境界条件を通してのみ流れに関与するとき、表面変位の方程式は

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{M_R \epsilon}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ h^2 \frac{\partial}{\partial x} (Z)_{y=h} \right\} \\ + \frac{1}{3} W \epsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{1}{3} \frac{\epsilon^3}{N_c} \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right)$$

($Z = \bar{Z} + Z^{(0)} + \epsilon Z^{(1)} + \dots$) と表わされる。更に4節のような問題の場合は $(Z)_h \equiv f(h)$ の形を取るので、この右辺第1項をバキ展開した式は、この種の問題の一般モデルと考えられる。実際、⑥の系更に液液界面 (2種の液層) の系でもそれを確かめる事ができる。

参考文献

- 1) J.R.A.Pearson:J.Fluid Mech. 4(1958)489.
- 2) C.V.Sternling and L.E.Scriven:AIChE J. 5(1959)514.
- 3) L.E.Scriven and C.V.Sternling:J.Fluid Mech. 19(1964)321.
- 4) K.A.Smith:J.Fluid Mech. 24(1966)401.
- 5) 舟田, 坂田: 数理解析研講究録 449(1982)57.
- 6) M.Sakata and T.Funada:J.Phys.Soc.Jpn. 50(1981)696.
- 7) 舟田:「乱流現象の解明と制御」理論4班合同研究会報告集(1983)25.
- 8) Y.Kuramoto and T.Tsuzuki:Prog.Theor.Phys. 55(1976)356.
- 9) G.I.Sivashinsky and D.M.Michelson:Prog.Theor.Phys. 63(1980)
2112.